## 基础课10 指数与对数的运算

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **考点考向** | **课标要求** | **真题印证** | **考频热度** | **核心素养** |
| 指数与对数的运算 | 掌握 | 2022年浙江卷  2021年天津卷 | ★☆☆ | 数学运算 |
| ★☆☆ | 数学运算 |
| 指数与对数运算的实际应用 | 掌握 | 2023年新高考Ⅰ卷  2022年北京卷 | ★★☆ | 数学运算数学建模 |
| 命题分析预测 | 从近几年高考的情况来看，指数与对数的运算会出现在关于函数模型及其应用的题型中，一般以选择题或填空题的形式出现.预计2025年高考命题以对数的运算性质为重点 | | | |

### 基础知识·诊断

#### 夯实基础

##### 一、根式的概念及性质

1.概念：式子叫作①根式，其中叫作根指数，叫作被开方数.

2.（1）负数没有偶次方根.

（2）0的任何次方根都是0，记作.

（3）且，使有意义.

（4）为大于1的奇数.

（5）为大于1的偶数.

##### 二、分数指数幂

1.正数的正分数指数幂的意义是，，，且.

2.正数的负分数指数幂的意义是，，，且.

3.0的正分数指数幂等于0.

4.0的负分数指数幂没有意义.

##### 三、指数幂的运算性质

实数指数幂的运算性质：；；，其中，，，.

##### 四、对数的概念

一般地，如果，且，那么数叫作以为底的对数，记作，其中叫作对数的底数，叫作真数.

##### 五、对数的性质、运算性质与换底公式

1.对数的性质：（1）；

（2），且

2.对数的运算性质

如果，且，，，那么

（1）⑪；

（2）⑫；

（3）⑬.

3.换底公式：⑭且，，且.

###### 知识 拓展

换底公式的两个重要结论

（1）；

（2）;

（3）.

其中,,,,且,,,,,.

#### 诊断自测

##### 题组1 走出误区

1. 判一判.（对的打“√”,错的打“×”）

（1） .( × )

（2） 分数指数幂可以理解为个相乘.( × )

（3） .( × )

（4） 若，则.( × )

2. （易错题）已知，化简1.

【**易错点**】忽视限制条件.

[解析]因为，所以.

##### 题组2 走进教材

3. （人教A版必修（1）改编）已知,，则的值为.

[解析]因为,，所以原式.

4. （人教A版必修 练习（2）改编）5.

[解析]根据对数的运算性质,化简可得.

##### 题组3 走向高考

5. [2022·浙江卷改编]已知，，则.

[解析]由，，得，所以.

### 考点聚焦·突破

#### 考点一 指数幂的化简与求值［自主练透］

1. 计算：79.

[解析]

.

2. 化简：.

[解析]原式.

3. 若，则.

[解析]由，两边平方，得，

再平方得，.

，故原式.



1.当进行指数幂的运算时，首先将根式、分数指数幂统一为分数指数幂,以便利用法则计算,但应注意：（1）必须同底数幂相乘,指数才能相加；（2）运算的先后顺序.

2.当底数是负数时,先确定符号,再把底数化为正数.

3.运算结果不能同时含有根号和分数指数幂,也不能既有分母又含有负指数.

#### 考点二 对数式的化简与求值［自主练透］

1. 若，，则( D ).

A. B. C. D.

[解析]对于，由，，得，，所以，故错误；

对于，，故错误；

对于，，故错误；

对于，，故正确.故选.

2. [2022·天津卷改编]2.

[解析]原式.

3. 7.

[解析]原式.



**对数式化简与求值的基本原则和常用方法**

1.基本原则：对数式的化简与求值一般是正用或逆用公式，对真数进行处理，选哪种策略化简，取决于问题的实际情况，一般本着便于真数化简的原则进行.

2.两种常用的方法

（1）“收”：将同底的两对数的和（差）收成积（商）的对数；

（2）“拆”：将积（商）的对数拆成同底的两对数的和（差）.

#### 考点三 指数与对数运算的实际应用［多维探究］

##### 指数运算的应用角度1

典例1 1947年，生物学家发表了一篇题为《》的论文，在论文中提出了一个克莱伯定律：对于哺乳动物，其基础代谢率与体重的次幂成正比，即，其中为基础代谢率，为体重.若某哺乳动物经过一段时间生长，其体重为原来的10倍，则基础代谢率约为原来的( C ).（参考数据：）

A. 5.4倍 B. 5.5倍 C. 5.6倍 D. 5.7倍

[解析]设该哺乳动物的原体重为，基础代谢率为，则，

经过一段时间生长，其体重为，基础代谢率为，则，则.故选.

##### 对数运算的应用角度2

典例2 [2023·新高考Ⅰ卷]（多选题）噪声污染问题越来越受到重视.用声压级来度量声音的强弱，定义声压级，其中常数是听觉下限阈值，是实际声压.不同声源的声压级如表所示：

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 声源 | 与声源的距离/ | 声压级/ |
| 燃油汽车 | 10 |  |
| 混合动力汽车 | 10 |  |
| 电动汽车 | 10 | 40 |

已知在距离燃油汽车、混合动力汽车、电动汽车处测得的实际声压分别为,,，则( ACD ).

A. B. C. D.

[解析]由题意可知，,,.

对于，，因为，所以，即，所以且,，可得，故正确；

对于，，因为，所以，即，所以且,，可得，当且仅当时，等号成立，故错误；

对于，因为，即，所以，即，故正确；

对于，由可知，，且，则，即，可得，且,，所以，故正确.故选.



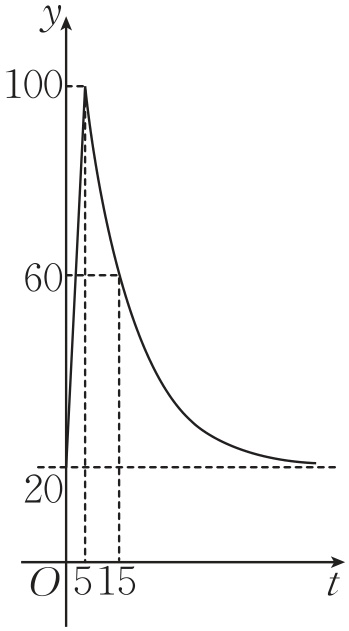
**解决指数、对数运算的实际应用问题的两个步骤**

1.理解题意，弄清楚条件和所求之间的关系；

2.运用指数或对数的运算公式、性质进行运算，把题目条件转化为所求.

##### 多维训练

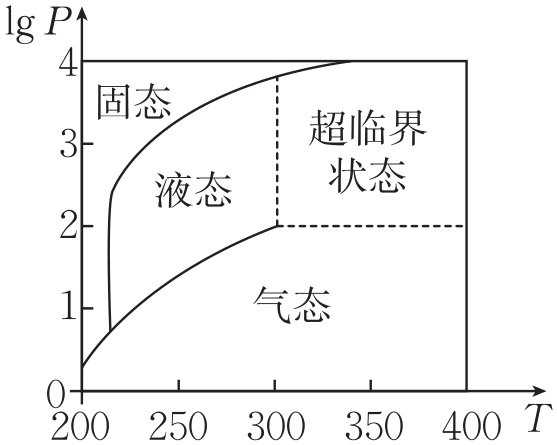
1. 某种热饮需用开水冲泡，其基本操作流程如下：①先将水加热到，水温（单位：）与时间（单位：）近似满足一次函数关系；②用开水将热饮冲泡后在室温下放置，温度（单位：）与时间（单位：）近似满足函数关系式（,为常数）.通常这种热饮在时的口感最佳，当某天室温为时，冲泡热饮的部分数据如图所示.若按上述流程冲泡一杯热饮，并在口感最佳时饮用，则最少需要的时间为( C ).



A. B. C. D.

[解析]由题意得，当时，函数图象是一条线段，当时，函数的解析式为，将点和点代入解析式，得解得故函数的解析式为，.令，解得,所以最少需要的时间为.故选.

2. [2022·北京卷节选]在一定条件下二氧化碳所处的状态与和的关系如图所示，其中表示温度，单位是；表示压强，单位是.下列结论正确的是( D ).



A. 当，时，二氧化碳处于液态

B. 当，时，二氧化碳处于气态

C. 当，时，二氧化碳处于超临界状态

D. 当，时，二氧化碳处于超临界状态

[解析]当，时，，此时二氧化碳处于固态，故错误.

当，时，，此时二氧化碳处于液态，故错误.

当，时，与4非常接近，此时二氧化碳处于固态，且时对应的是非超临界状态，故错误.

当，时，,此时二氧化碳处于超临界状态，故正确.故选.